BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2013*

UOT 517.97

NAZİK LÖVHƏNİN RƏQSLƏRİ TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV, X.İ.SEYFULLAYEVA
Bakı Dövlət Universiteti, Sumqayıt Dövlət Universiteti
seyfullayeva.xeyale@yandex.ru

Təqdim olunan işdə nazik lövhənin rəqslərinin xətti tənliyi üçün kvadratik meyarlı optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Əvvəlcə hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün sərhəd məsələsinin həllinin varlığı öyrənilmişdir. Sonra baxılan məsələdə optimal idarəedicinin varlıq teoremi isbat edilmişdir, sonda optimallıq üçün inteqral bərabərsizlik şəklində zəruri və kafi şərt çıxarılmışdır.

Açar sözlər: nazik lövhə, optimal idarəetmə, varlıq teoremi, zəruri və kafi şərt.

Məlumdur ki, nazik lövhənin rəqsləri dördtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunur [1], [2]. Ona görə də belə proseslərdə optimal idarəetmə məsələlərinin, yəni optimal idarəedicinin varlığının isbatı, optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlərin çıxarılması, optimal idarəedicinin və ona uyğun optimal vəziyyətin təqribi qurulması məsələlərinin öyrənilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Son dövrlərdə belə proseslər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin intensiv tədqiqinə başlanıb. Belə işlərdən [3], [4]-ü qeyd etmək olar.

Məsələnin qoyuluşu. Tutaq ki, idarə olunan proses

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nabla^2(D\nabla^2 u)+(1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\upsilon(x,y,t) \quad (1)$$

nazik lövhənin rəqsləri tənliyi [1], [2],

$$u(x,y,0)=u_0(x,y),\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=u_1(x,y) \quad (2)$$

başlanğıc şərtləri və

$$\begin{aligned}&u(0,y,t)=0,\frac{\partial u(0,y,t)}{\partial x}=0,u(x,0,t)=0,\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial y}=0,\\&u(a,y,t)=0,\frac{\partial u(a,y,t)}{\partial x}=0,u(x,b,t)=0,\frac{\partial u(x,b,t)}{\partial y}=0\end{aligned} \quad (3)$$

sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur, burada $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,a) \times (0,b)$, a, b, T müsbət ədədlər, $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$-verilmiş funksiyalardır, belə ki, $u_0 \in \overset{o}{W}{}_2^2(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Omega)$, $u(x,y,t)$-lövhənin yerdəyişməsi, $\upsilon(x,y,t)$-idarəedici funksiya, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$-lövhənin əyilmə möhkəmliyi, $h(x,y)$-lövhənin qalınlığıdır, $0 < \mu_1 \le h(x,y) \le \mu_2$, μ_1, μ_2-verilmiş ədədlərdir və $h(x,y)$-in Ω-da iki tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var, E ($E > 0$)-Yunq modulu, ν $\left(0 < \nu < \dfrac{1}{2}\right)$-Puasson əmsalıdır, ∇^2-Laplas operatorudur, $\rho(x,y)$-lövhənin kütlə sıxlığıdır, o, $\overline{\Omega}$-da kəsilməzdir və $\rho(x,y) \ge \gamma > 0$, γ-verilmiş ədəddir.

Mümkün $\upsilon(x,y,t)$ idarəedicilər sinfi olaraq $L_2(Q_T)$-dən qabarıq qapalı U_{ad} çoxluğu götürülür.

Hər bir $\upsilon(x,y,t)$ mümkün idarəedicisinə uyğun (1)-(3) məsələsinin həlli dedikdə elə $u(x,y,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$ funksiyası başa düşülür ki, o ixtiyari $\eta(x,y,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\eta(x,y,T) = 0,$

$$\eta(0,y,t) = 0, \frac{\partial \eta(0,y,t)}{\partial x} = 0, \eta(x,0,t) = 0, \frac{\partial \eta(x,0,t)}{\partial y} = 0,$$

$$\eta(a,y,t) = 0, \frac{\partial \eta(a,y,t)}{\partial x} = 0, \eta(x,b,t) = 0, \frac{\partial \eta(x,b,t)}{\partial y} = 0$$

funksiyası üçün

$$\int_{Q_T} \left[-\rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + D\nabla^2 u \nabla^2 \eta + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \eta \right] dxdydt +$$

$$- \int_{\Omega} \rho u_1(x,y) \eta(x,y,0) dxdy = \int_{Q_T} \upsilon(x,y,t) \eta(x,y,t) dxdydt$$

inteqral eyniliyini və $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ şərtini ödəsin.

Aşağıdakı kimi optimal idarəetmə məsələsi qoyulur: U_{ad} mümkün idarəedicilər sinfindən elə idarəedici tapmalı ki, o, (1)-(3) başlanğıc-sərhəd məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J(\upsilon) = \int_{Q_T} [u(x,y,t) - z_d(x,y,t)]^2 dxdydt + \alpha \int_{Q_T} \upsilon^2(x,y,t) dxdydt \quad (4)$$

funksionalına minimum qiymət versin, burada $z_d(x,y,t)$ funksiyası $L_2(Q_T)$-dən verilmiş funksiyadır, $\alpha > 0$- verilmiş ədəddir.

I. (1)-(3) məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi

Teorem 1. Hər bir qeyd olunmuş $\upsilon(x,y,t)$ mümkün idarəedcisi üçün (1)-(3) məsələsinin $W_2^{2,1}(Q_T)$ fəzasında yeganə həll var.

Həllin varlığını göstərmək üçün Faedo-Qalyorkin üsulunu tətbiq edək. $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ -dən olan $\{\omega_i(x,y)\}_{i=1}^{\infty}$ bazis funksiyaları götürək və (1)-(3) məsələsinin təqribi həllini

$$u^N(x,y,t)=\sum_{i=1}^{N} c_i^N(t)\omega_i(x,y)$$

şəklində aşağıdakı bərabərliklərdən axtaraq:

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\omega_j(x,y)dxdy+\int_\Omega D\nabla^2 u^N \nabla^2 \omega_j(x,y)dxdy+$$
$$+(1-\nu)\int_\Omega \left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)\omega_j(x,y)dxdy= \qquad (5)$$
$$=\int_\Omega \upsilon(x,y,t)\omega_j(x,y)dxdy, \quad 1\le j\le N,$$

$$c_i^N(0)=\alpha_i^N,\ \frac{d}{dt}c_i^N(t)\bigg|_{t=0}=\beta_i^N,$$

burada α_i^N və β_i^N, $\varphi_0(x,y)$ və $\varphi_1(x,y)$ funksiyalarını $N\to\infty$ olduqda uygun olaraq $W_2^2(\Omega)$ və $L_2(\Omega)$ -də aproksimasiya edən

$$\varphi_0^N(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^N\omega_i(x,y),\ \varphi_1^N(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\beta_i^N\omega_i(x,y)$$

cəmlərinin əmsallarıdır.

(5) bərabərliyinin hər iki tərəfini $\frac{d}{dt}c_j^N(t)$ -yə vurub, j görə 1-dən N -ə qədər cəmləsək, alarıq:

$$\int_\Omega \rho\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy+\int_\Omega D\nabla^2 u^N\nabla^2\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy+$$
$$+(1-\nu)\int_\Omega\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy=$$
$$=\int_\Omega \upsilon(x,y,t)\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy.$$

Buradan alınır ki,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left[\rho\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+D\left(\nabla^2 u^N\right)^2\right]dxdy=$$

$$=-(1-\nu)\int_{\Omega}\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy+$$

$$+\int_{\Omega}\upsilon(x,y,t)\frac{\partial u^N}{\partial t}dxdy\,.$$

Bu bərabərliyi t-yə görə inteqrallasaq verilənlər üzərinə qoyulmuş şərtlər daxilində aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\nabla^2 u^N\right)^2\right]dxdy\le C+$$

$$+C\int_0^t\int_{\Omega}\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdydt\,,$$

$$\forall t\in[0,T],$$

burada və bundan sonra C ilə müxtəlif sabitləri işarə edəcəyik.

$\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ fəzasında normaların ekvivalentliyinə görə

$$\int_{\Omega}\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\nabla^2 u^N\right)^2\right]dxdy\le$$

$$\le C+C\int_0^t\int_{\Omega}\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdydt$$

olar.

[5]-dəki məlum

$$\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy\le\int_{\Omega}\left[\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right]^2dxdy$$

bərabərsizliyinə görə alarıq:

$$\int_{\Omega}\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy\le$$

$$\le C+C\int_0^t\int_{\Omega}\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdydt\,\cdot$$

Bu bərabərsizliyə Qronuoll lemmasını tətbiq etsək,

$$\int_{\Omega}\left[\left(u^N\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy \le const,$$

$$\forall t\in[0,T] \qquad (6)$$

olar.

Buradan alınır ki, $\{u^N\}$ ardıcıllığı $W_2^{2,1}(Q_T)$-də məhduddur. Ona görə də $\{u^N\}$-dən elə alt ardıcıllıq ayırmaq olar ki (həmin ardıcıllığı da $\{u^N\}$ kimi işarə edəcəyik), $N\to\infty$ olduqda

$$u^N\to u,\ \frac{\partial u^N}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u^N}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u^N}{\partial y}\to\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}\to\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}\to\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ \ L_2(Q_T)\text{-də zəif.}$$

Onda kompaktlıq teoreminə görə [5], $N\to\infty$ olduqda

$$u^N\to u,\ \frac{\partial u^N}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u^N}{\partial y}\to\frac{\partial u}{\partial y}\ \ L_2(Q_T)\text{-də güclü.}$$

(1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllinin tərifində $u=u^N$ götürək:

$$\int_{Q_T}\left[-\rho\frac{\partial u^N}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+D\nabla^2u^N\nabla^2\eta+(1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2}\right)\eta\right]dxdydt-$$

$$-\int_{\Omega}\rho\varphi_1^N(x,y)\eta(x,y,0)dxdy=\int_{Q_T}\upsilon(x,y,t)\eta(x,y,t)dxdydt.$$

Burada $N\to\infty$ şərtində limitə keçsək,

$$\int_{Q_T}\left[-\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t}+D\nabla^2u\nabla^2\eta+(1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\eta\right]dxdydt-$$

$$-\int_{\Omega}\rho\varphi_1(x,y)\eta(x,y,0)dxdy=\int_{Q_T}\upsilon(x,y,t)\eta(x,y,t)dxdydt$$

olar. Beləliklə, alırıq ki, $u(x,y,t)$ funksiyası (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir.

Həllin yeganəliyini standart üsulla göstərmək olar, yəni hər bir mümkün idarəediciyə uyğun (1)-(3) məsələsinin iki u_1, u_2 həllinin olduğunu fərz etsəydik, onların fərqi olan $u=u_1-u_2$ üçün (6)-ya analoji olaraq

$$\int_{\Omega}\left[(u)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dxdy \le const,$$

$$\forall t\in[0,T]$$

qiymətləndirməsini alardıq. Buradan isə $u=u_1-u_2\equiv 0$ olduğu alınır, yəni $u_1=u_2$.

II. Optimal idarəedicinin varlığı

Teorem 2. (1)-(4) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər daxilində həmin məsələdə optimal idarəedici var.

İsbatı. Tutaq ki, $\{\upsilon_n\} \in U_{ad}$ minimallaşdırıcı ardıcılıqdır, yəni

$$\lim_{n\to\infty} J(\upsilon_n) = \inf_{\upsilon\in U_{ad}} J(\upsilon). \tag{7}$$

Buradan alınır ki,

$$\|\upsilon_n\|_{L_2(Q_T)} \le const. \tag{8}$$

(1)-(3) məsələsinin υ_n idarəedicisinə uyğun həllini $u_n(x,y,t)$ ilə işarə edək.

$\{u_n\}$ ardıcıllığı üçün I hissədəki qayda ilə

$$\|u_n\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le const \tag{9}$$

qiymətləndirməsini alarıq.

(8), (9) münasibətlərindən Hilbert fəzasındakı zəif kompaktlıq xassəsinə əsasən $n\to\infty$ olduqda alarıq:

$$\upsilon_n \to \upsilon_0 \quad L_2(Q_T)\text{-də zəif} \tag{10}$$

və

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} \to \frac{\partial u_0}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y} \to \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} \to \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad L_2(Q_T)\text{-də zəif.} \tag{11}$$

Ümumiləşmiş həllin tərifində $\upsilon = \upsilon_n$, $u = u_n$ yazaq:

$$\int_{Q_T}\left[-\rho\frac{\partial u_n}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + D\nabla^2 u_n \nabla^2 \eta + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right)\eta\right]dxdydt -$$

$$-\int_{\Omega}\rho\varphi_1(x,y)\eta(x,y,0)dxdy = \int_{Q_T}\upsilon_n(x,y,t)\eta(x,y,t)dxdydt.$$

(10) və (11)-u nəzərə almaqla bu bərabərlikdə limitə keçək:

$$\int_{Q_T}\left[-\rho\frac{\partial u_0}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + D\nabla^2 u_0 \nabla^2 \eta + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)\eta\right]dxdydt -$$

$$-\int_{\Omega}\rho\varphi_1(x,y)\eta(x,y,0)dxdy = \int_{Q_T}\upsilon_0(x,y,t)\eta(x,y,t)dxdydt.$$

Bu münasibət göstərir ki, $u_0(x,y,t)$ funksiyası (1)-(3) məsələsinin $\upsilon_0(x,y,t)$ idarəedicisinə uyğun həllidir.

(4) funksionalı kvadratik olduğundan o aşağıdan zəif yarımkəsilməzdir, yəni

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} J(\upsilon_n) \ge J(\upsilon_0). \tag{12}$$

Onda (7) və (12) münasibətlərindən

$$\inf_{\upsilon\in U_{ad}} J(\upsilon) \geq J(\upsilon_0)\,.$$

Buradan

$$\inf_{\upsilon\in U_{ad}} J(\upsilon) = J(\upsilon_0)\,,$$

deməli, $\upsilon_0(x,y,t)$ idarəedicisi U_{ad} sinfində $J(\upsilon)$ funksionalına minimum qiymət verir, yəni $\upsilon_0(x,y,t)$ optimal idarəedicidir.

Teorem isbat olundu.

III. Optimallığın zəruri şərti

Verilmiş mümkün $\upsilon_0(x,y,t)$ idarəedicisi üçün aşağıdakı qoşma məsələni daxil edək:

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\nabla^2(D\nabla^2\psi)+(1-\nu)\left[2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\psi\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\psi\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\psi\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)\right]=-2(u_0-z_d) \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}\psi(0,y,t)=\psi(a,y,t)=0,\frac{\partial\psi(0,y,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(a,y,t)}{\partial x}=0,\\ \psi(x,0,t)=\psi(x,b,t)=0,\frac{\partial\psi(x,0,t)}{\partial y}=\frac{\partial\psi(x,b,t)}{\partial y}=0,\end{aligned} \qquad (14)$$

$$\psi(x,y,T)=0\,,\ \frac{\partial\psi(x,y,T)}{\partial t}=0\,, \qquad (15)$$

burada $u_0(x,y,t)$ funksiyası $\upsilon_0(x,y,t)$ idarəedicisinə uyğun (1)-(3) məsələsinin həllidir.

(1)-(3) məsəsləsində olduğu kimi göstərmək olar ki, (13)-(15) qoşma məsələsinin də $W_2^{2,1}(Q_T)$ -dən olan yeganə ümumiləşmiş həlli var.

Optimallığın zəruri şərtini çıxarmaq üçün iki $\upsilon_0(x,y,t)$ və $\upsilon_0(x,y,t)+\delta\upsilon(x,y,t)$ mümkün idarəedicisini götürək. Bu idarəedicilərə uyğun (1)-(3) məsələsinin həllərini $u_0(x,y,t)$ və $u_0(x,y,t)+\delta u(x,y,t)$ ilə işarə edək. Onda $\delta u(x,y,t)$ aşağıdakı

$$\rho\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial t^2}+\nabla^2(D\nabla^2(\delta u))+(1-\nu)\left\{2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}\right\}=\delta\upsilon \qquad (16)$$

$$\begin{aligned}\delta u(0,y,t)=\delta u(a,y,t)=0,\frac{\partial(\delta u(0,y,t))}{\partial x}=\frac{\partial(\delta u(a,y,t))}{\partial x}=0,\\ \delta u(x,0,t)=\delta u(x,b,t)=0,\frac{\partial(\delta u(x,0,t))}{\partial y}=\frac{\partial(\delta u(x,b,t))}{\partial y}=0,\end{aligned} \qquad (17)$$

$$\delta u(x,y,0)=0\,,\ \frac{\partial(\delta u(x,y,0))}{\partial t}=0 \qquad (18)$$

sərhəd məsələsinin həlli olar.

I hissədə olduğu kimi buradan asanlıqla

$$\|\delta u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \le C\|\delta\upsilon\|_{L_2(Q_T)} \tag{19}$$

qiymətləndirməsini almaq olar.

$J(\upsilon)$ funksionalının artımını hesablayaq:

$$\Delta J(\upsilon_0) = J(\upsilon_0+\delta\upsilon) - J(\upsilon_0) = \int_{Q_T}\left[(u_0+\delta u - z_d)^2 - (u_0 - z_d)^2\right]dxdydt +$$
$$+\alpha\int_{Q_T}\left[(\upsilon_0+\delta\upsilon)^2 - \upsilon_0^{\,2}\right]dxdydt = 2\int_{Q_T}(u_0 - z_d)\delta u dxdydt + 2\alpha\int_{Q_T}\upsilon_0\delta\upsilon dxdydt + R, \tag{20}$$

burada

$$R = \int_{Q_T}\left((\delta u)^2 + \alpha(\delta\upsilon)^2\right)dxdydt$$

ilə qalıq hədd işarə edilmişdir.

(19) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq

$$R \le C\|\delta\upsilon\|^2_{L_2(Q_T)} \tag{21}$$

olar.

δu funksiyası (16)-(18) sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli olduğundan ixtiyari $\eta(x,y,t)\in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\eta(x,y,T)=0$,

$$\eta(0,y,t)=0, \frac{\partial\eta(0,y,t)}{\partial x}=0, \eta(x,0,t)=0, \frac{\partial\eta(x,0,t)}{\partial y}=0,$$
$$\eta(a,y,t)=0, \frac{\partial\eta(a,y,t)}{\partial x}=0, \eta(x,b,t)=0, \frac{\partial\eta(x,b,t)}{\partial y}=0$$

funksiyası üçün

$$\int_{Q_T}\left[-\rho\frac{\partial(\delta u)}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t} + D\nabla^2(\delta u)\nabla^2\eta + (1-\nu)\left(2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2(\delta u)}{\partial x^2}\right)\eta\right]dxdydt - \tag{22}$$
$$-\int_{Q_T}\delta\upsilon\eta(x,y,t)dxdydt = 0$$

inteqral eyniliyi doğrudur.

$\psi(x,y,t)$ funksiyası (13)-(15) qoşma məsələsinin ümumiləşmiş həlli olduğundan ixtiyari $\chi(x,y,t)\in W_2^{2,1}(Q_T)$, $\chi(x,y,0)=0$,

$$\chi(0,y,t)=0, \frac{\partial\chi(0,y,t)}{\partial x}=0, \chi(x,0,t)=0, \frac{\partial\chi(x,0,t)}{\partial y}=0,$$
$$\chi(a,y,t)=0, \frac{\partial\chi(a,y,t)}{\partial x}=0, \chi(x,b,t)=0, \frac{\partial\chi(x,b,t)}{\partial y}=0$$

funksiyası üçün

$$\int_{Q_T}\left[-\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\chi}{\partial t} + D\nabla^2\psi\nabla^2\chi + (1-\nu)\left(2\psi\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} - \psi\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - \psi\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\right) + 2(u_0 - z_d)\chi\right]dxdydt = 0 \tag{23}$$

inteqral eyniliyi doğrudur.

(22)-də $\eta = \psi$, (23)-də $\chi = \delta u$ götürüb onları tərəf-tərəfə çıxaq və alınan ifadəni funksionalın artımına əlavə edək. Onda funksionalın artımı

$$\Delta J(\upsilon_0) = \int_{Q_T} (-\psi + 2\alpha\upsilon_0)\delta\upsilon dxdydt + R \tag{24}$$

şəklinə düşər.

(21)-i nəzərə alsaq funksionalın artımının (24) düsturundan alarıq ki, baxılan məsələdə funksionalın qradiyenti

$$gradJ(\upsilon_0) = -\psi + 2\alpha\upsilon_0$$

düsturu ilə hesablanır.

Onda [6]-dakı məlum teoremə görə (səh. 28) $\upsilon_0(x, y, t)$ idarəedicisinin optimal idarəedici olması üçün zəruri şərt

$$\int_{Q_T} (-\psi + 2\alpha\upsilon_0)(\upsilon - \upsilon_0)dxdydt \geq 0, \ \forall \upsilon \in U_{ad} \tag{25}$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

(4) funksionalı U_{ad} -də ciddi qabarıq olduğundan (25) şərti $\upsilon_0(x, y, t)$ idarəedicisinin optimallığı üçün həm də kafi şərtdir.

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq:

Teorem 3. (1)-(4) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər daxilində $\upsilon_0(x, y, t)$ idarəedicisinin optimal idarəedici olması üçün zəruri və kafi şərt (25) bərabərsizliyinin ödənməsidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 158 с.
2. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций, М.: Мир, 1977, 144 с.
3. Zhang Xinong, Zhang Jinghui. The hybrid control of vibration of thin plate with active constrained damping layer. Applied Mathematics amd Mechanics. (English Edition, v. 19, № 12, Dec. 1998).
4. Sadek S., Adali S., Sloss J.M., Bruchjr J.C. Vibration damping of a thin plate by optimal open-and closed-loop control forces. Journal of the Franklin Institute, Pergamon Presa ple. (v. 329, № 2, pp. 207-214, 1992. Printed in Great Britain).
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.: Наука, 1973, 408 с.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач, М.: Наука, 1981, 399 с.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Г.Ф.КУЛИЕВ, Х.И.СЕЙФУЛЛАЕВА

РЕЗЮМЕ

В представленной работе рассмотрена задача оптимального управления с квадратичным критерием для линейного уравнения колебаний тонкой пластины. Сначала для каждого фиксированного допустимого управления изучено существование решения

граничной задачи. Далее доказана теорема существования оптимального управления и в конце выведено необходимое и достаточное условие оптимальности в виде интегрального неравенства.

Ключевые слова: тонкая пластина, оптимальное управление, теорема существования, необходимое и достаточное условие.

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE EQUATION OF VIBRATIONS OF THIN PLATE

H.F.GULIYEV, Kh.I.SEYFULLAYEVA

SUMMARY

The paper considers the optimal control problem for the linear equation of vibrations of the thin plate with quadratic criteria. First, for every fixed admissable control the existense of solution of boundary value problem is studied. Next, the theorem of existence of the optimal control is proved and necessary and sufficient conditions of optimality in the form of integral inequality are obtained.

Key word: thin plate, optimal control, existence theorem, necessary and sufficient conditions.

Редаксийайа дахил олду: 22.05.2013-ъц ил.
Чапа имзаланды: 17.10.2013-ъц ил.